Roll No. ....

DD–2710

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part II) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Third

(Mechanics)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt all questions. Answer any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) दो बराबर और भार P, दो डोरियों ACP और BCP से बँधे हुए हैं जो एक चिकनी खूँटी C के ऊपर होकर जाती है। AB एक भारी दण्ड है जिसका भार W है और जिसका गुरुत्व केन्द्र A से a फीट और B से b फीट है। दर्शाइये कि AB क्षैतिज से कोण $\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$ बनाती है।

Equal weights P and P are attached to two strings ACP and BCP passing over a smooth peg C. AB is a heavy beam of weight W, whose centre of gravity is a feet from A and b feet from B; show that AB is inclined to the horizon at an angle :

$$\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$$

(ब) एक समद्विबाहु त्रिभुज के आकार में एक पटल जिसका शीर्ष कोण α है, r त्रिज्या के एक गोले पर इस प्रकार रखा हुआ है कि समतल ऊर्ध्वाधर है और बराबर भुजाओं में से एक गोले के सम्पर्क में है। दर्शाइए कि यदि त्रिभुज अपने स्वयं के समतल में हल्के से विस्थापित किया जाए तो साम्यावस्था स्थायी है यदि $\sin\alpha < \frac{3r}{a}$ जहाँ a बराबर भुजाओं में से एक है।

A lamina in the form of an isosceles triangle whose vertical angle is α, is placed on a sphere of radius r so that its plane is vertical and one of the equal sides is in contact with the sphere. Show that if the triangle be slightly displaced in its own plane, the equilibrium is stable if $\sin\alpha < \frac{3r}{a}$ where a is one of the equal sides.

(स) $2s$ फुट लम्बाई की एक समांग डोरी को, एक ही क्षैतिज समतल में स्थित दो बिन्दुओं से इस प्रकार लटकाया गया है कि उसका महत्तम तनाव b लम्बाई की डोरी के भार से अधिक न हो। दर्शाइए कि इसकी महत्तम विस्तृति $\sqrt{b^2 - s^2}\log\frac{b+s}{b-s}$ है।

A given length $2s$ of a uniform chain has to be hung between two points at the same level and the tension has not to exceed the weight of a length b of the chain. Show that the greatest span is :

$$\sqrt{b^2 - s^2}\log\frac{b+s}{b-s}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) किसी दिए गए बल निकाय के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए।

To find the equation of the central axis of any given system of forces.

(ब) तीन बल सरल रेखाओं :

$$x = 0, y - z = a;$$
$$y = 0, z - x = a;$$
$$z = 0, x - y = a$$

के अनुदिश क्रिया करते हैं। दर्शाइए कि वे एक बलयुग्म में समानीत नहीं हो सकते।

Three forces act along the straight lines :

$$x = 0, y - z = a;$$
$$y = 0, z - x = a;$$
$$z = 0, x - y = a$$

Show that they cannot reduce to a couple.

(स) डायनमे (X, Y, Z, L, M, N) के लिए समतल $x + y + z = 0$ की शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिए।

Find the null point of the plane $x + y + z = 0$ for the dyname (X, Y, Z, L, M, N).

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइए कि यदि एक सरल रेखा में गति करने वाले एक कण का विस्थापन समीकरण $x = a\cos nt + b\sin nt$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, तो यह एक सरल आवर्त गति करता है जिसका आयाम $\sqrt{a^2+b^2}$ तथा आवर्त $\frac{2\pi}{n}$ है।

Show that the displacement of a particle moving in a straight line is expressed by the equation $x = a\cos nt + b\sin nt,$ it describes a simple harmonic motion whose amplitude is $\sqrt{a^2+b^2}$ and time period is $\frac{2\pi}{n}$.

(ब) चिकनी मेज पर दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा में m द्रव्यमान का एक कण सरल आवर्त गति में गतिमान है और इन बिन्दुओं से यह प्रत्यास्थ डोरियों से बँधा है जिनका साम्यावस्था में प्रत्येक का तनाव T है। दर्शाइए कि एक दोलन का समय है :

$$2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$$

जहाँ l, l' डोरियों की प्राकृतिक लम्बाइयों के ऊपर उनके विस्तार हैं।

A particle of mass m executes S. H. M. in the line joining the points A and B on the smooth table and is connected with these points by elastic strings whose tensions in equilibrium are each T; show that the time of an oscillation is $2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$, where l, l' are the extensions of the strings beyond their natural lengths.

(स) कोई कण h ऊँचाई की मीनार के शिखर से क्षैतिज में $\sqrt{2gh}$ के वेग से फेंका गया, तो मीनार की जड़ से उस बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ कण भूमि पर आघात करता है। उड्डयन काल तथा आघात करते समय का वेग भी ज्ञात कीजिए।

A particle is thrown horizontally, with velocity $\sqrt{2gh}$, from the top of a tower of height h. Find where it will strike the level ground through the foot of the tower. Find the time of flight and also find its striking velocity.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) एक ग्रह सूर्य (नाभि मानकर) के परित: एक दीर्घवृत्त निर्मित कर रहा है; दर्शाइए कि सूर्य से दूरस्थ वेग महत्तम है जब ग्रह को मिलाने वाली ध्रुवांतर पथ की दीर्घाक्ष से समकोण बनाती है और तब यह है $\frac{2\pi ae}{T\sqrt{1-e^2}}$ जहाँ $2a$ दीर्घाक्ष, e उत्केन्द्रता और T आवर्तकाल है।

A planet is describing an ellipse about the sun as focus; show that the velocity away from the sun is greatest when the radius vector to the planet is at right angles to the major axis of the path and that it then is $\frac{2\pi ae}{T\sqrt{1-e^2}}$ where $2a$ is the major axis, e the eccentricity and T the periodic time.

(ब) एक कण एक समतल वक्र पर गतिमान है। यदि स्पर्श रेखीय और अभिलाम्बिक त्वरण सदैव अचर रहते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि कोण ψ जो गति की दिशा समय t में घूमती है, समीकरण $\psi = A\log(1+Bt)$ द्वारा निर्धारित होता है।

A particle is describing a plane curve. If the tangential and normal accelerations are each constant throughout the motion, prove that the angle ψ, through which the direction of motion turns in time t is given by $\psi = A \log (1 + Bt)$.

(स) एक कण जिस पर कोई बल क्रिया नहीं कर रहा है, रूक्ष गोले के आंतरिक पृष्ठ के अनुदिश प्रक्षिप्त किया जाता है। दर्शाइए कि यह $\frac{a}{\mu V}\left(e^{2\mu\pi} - 1\right)$ समय पश्चात् प्रक्षेप बिन्दु पर वापिस लौट आएगा, जहाँ a गोले की त्रिज्या, प्रक्षेप वेग V तथा घर्षण गुणांक μ है।

A particle is projected along the inner surface of a rough sphere and is acted on by no forces; show that it will return to the point of projection at the end of time $\frac{a}{\mu V}\left(e^{2\mu\pi} - 1\right)$, where a is the radius of the sphere, V is the velocity of projection and μ is the coefficient of friction.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) एक कण V वेग से एक चिकने क्षैतिज समतल पर ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है, जिसकी प्रति इकाई संहति पर प्रतिरोध k (वेग) है। दर्शाइए कि t समय के पश्चात् कण का वेग V और इस समय में चली गई दूरी S निम्नांकित से दी जाती है :

$$V = Ve^{-kt} \text{ या } S = \frac{V}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a resisting medium whose resistance per unit mass is k (velocity). Show that the velocity V after a time t and the distance travelled S in that time are given by :

$$V = Ve^{-kt} \text{ and } S = \frac{V}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

(ब) तरल की एक गोलाकार बूँद वाष्प में गिरते हुए संघनन द्वारा C की अचर दर से द्रव्यमान प्राप्त करती है। दशाओं की विराम में गिरते हुए t समय बाद इसका वेग है :

$$\frac{1}{2} gt \left[1 + \frac{M}{M + ct}\right]$$

जहाँ M बूँद का प्रारम्भिक द्रव्यमान है।

A spherical drop of liquid falling freely in a vapour acquires mass by condensation at a constant rate C. Show that the velocity after falling from rest in time t is :

$$\frac{1}{2} gt \left[1 + \frac{M}{M + ct}\right]$$

where M is the initial mass of the drop.

(स) यदि एक कण त्रिविम दिशा में गतिमान है, तो कार्तीय निर्देशांक के पदों में किसी कण का त्वरण ज्ञात कीजिए।

If a particle moves in three dimensions, then find the acceleration of the particle in terms of Cartesian co-ordinates.