

Roll No. ....

**DD-2759**

**B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part III)**

**EXAMINATION, 2020**

**MATHEMATICS**

**Paper Second**

**(Abstract Algebra)**

*Time : Three Hours*

*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) मान लो  $G$  एक समूह है तथा  $g$ , समूह  $G$  का एक स्थिर अवयव है। तब सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण  $T_g : G \rightarrow G$  जो कि  $T_g(x) = g x g^{-1} \forall x \in G$  से परिभाषित है, समूह  $G$  का एक स्वाकारिता है।

Let  $G$  be a group and  $g \in G$  be a fixed element of  $G$ . Then prove that the mapping  $T_g : G \rightarrow G$  defined by  $T_g(x) = g x g^{-1} \forall x \in G$  is an automorphism.

(A-31) P. T. O.

- (ब) मान लो  $H$  तथा  $K$  एक परिमित समूह  $G$  के कोई दो उपसमूह हैं तथा  $o(H) > \sqrt{o(G)}$  एवं  $o(K) > \sqrt{o(G)}$ , तब दर्शाइये कि :

$$H \cap K \neq \{e\},$$

जहाँ  $e$  समूह  $G$  का तत्समक है।

Let  $H$  and  $K$  be two subgroups of a finite group  $G$ , such that :

$$o(H) > \sqrt{o(G)} \text{ and } o(K) > \sqrt{o(G)}$$

then show that  $H \cap K \neq \{e\}$ , where  $e$  is the identity element of  $G$ .

- (स) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह  $G$  का केन्द्र  $Z(G)$ , सदैव  $G$  पर एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that the centre  $Z(G)$  of a group  $G$  is always a normal subgroup of  $G$ .

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि एक वलय का प्रत्येक विभाग वलय, उस वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।

Prove that every quotient ring of a ring, is homeomorphic image of the ring.

- (ब) यदि  $f(x)$  तथा  $g(x), R[x]$  के दो शून्येतर बहुपद हों, तो दर्शाइये कि :

$$(i) \quad \deg |f(x) + g(x)| \leq \max \{ \deg f(x), \deg g(x) \}$$

यदि  $f(x) + g(x) \neq 0$ ;

$$(ii) \quad \deg |f(x) + g(x)| \leq \deg f(x) + \deg g(x)$$

If  $f(x)$  and  $g(x)$  are two non-zero polynomials of  $R[x]$ , then show that :

$$(i) \quad \deg |f(x) + g(x)| \leq \max \{ \deg f(x), \deg g(x) \}$$

if  $f(x) + g(x) \neq 0$ ;

$$(ii) \quad \deg |f(x) \cdot g(x)| \leq \deg f(x) + \deg g(x)$$

- (स) शेषफल प्रमेय “यदि बहुपद  $f(x)$  को  $(x-a)$  से भाग दिया जाये, तो शेषफल  $f(a)$  होता है।” सिद्ध कीजिए।  
The remainder theorem “If the polynomial is divided by  $(x-a)$ , then the remainder is  $f(a)$ .” Prove this theorem.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइये कि सदिश  $(2, 1, 4)$ ,  $(1, -1, 2)$  और  $(3, 1, -2)$ ,  $R^3$  के लिए एक आधार निर्मित करते हैं।

Show that the vectors  $(2, 1, 4)$ ,  $(1, -1, 2)$  and  $(3, 1, -2)$  make the basis of  $R^3$ .

- (ब) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि के किन्हीं दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ भी एक उपसमष्टि होता है।

Show that the intersection of two vector subspaces of a given vector space is also a vector subspace.

- (स) सिद्ध कीजिए कि  $R[x]$ ,  $R$  पर  $x$  में सभी बहुपदों के सदिश समष्टि में बहुपदों :

$$p(x) = 1 + x + 2x^2$$

$$q(x) = 2 - x + x^2$$

$$r(x) = -4 + 5x + x^2$$

का निकाय रैखिकतः परतन्त्र बहुपद है।

Prove that the polynomials :

$$p(x) = 1 + x + 2x^2$$

$$q(x) = 2 - x + x^2$$

$$r(x) = -4 + 5x + x^2$$

defined on  $R[x]$ , where  $R$  is the vector space of all polynomials of  $x$ , are linearly dependent polynomials.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) दिखाइये कि प्रतिचित्रण :

$$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$$

जो कि  $T(a, b, c) = (c, a + b)$  से परिभाषित है, एक रैखिक प्रतिचित्रण है।

(A-31)

Show that the mapping :

$$T: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$$

defined by  $T(a, b, c) = (c, a + b)$  is a linear transformation.

- (ब) इनमें से कौन-सा प्रतिचित्रण; जो कि  $R^2$  के सदिशों  $\alpha = (x_1, x_2)$ ,  $\beta = (y_1, y_2)$  के लिए परिभाषित है, द्वि-एकघाती समघात है ? द्वि-एकघाती के लिए दोनों की जाँच कीजिए :

$$(i) f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$(ii) g(\alpha, \beta) = (x_1 - y_2)^2 + x_2 y_2$$

Which of the following mappings; defined on  $R^2$  for vector  $\alpha = (x_1, x_2)$ ,  $\beta = (y_1, y_2)$  is bilinear form ?

Test both for bilinearity :

$$(i) f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$(ii) g(\alpha, \beta) = (x_1 - y_2)^2 + x_2 y_2$$

- (स) निम्नलिखित सममित आव्यूह के संगत द्विघाती समघात को लिखिए :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(A-31) P. T. O.

Write the following symmetric matrix :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

into corresponding quadratic form.

इकाई-5

(UNIT-5)

5. (अ) यदि  $\alpha$  और  $\beta$  एक आन्तर-गुणन समष्टि  $V(F)$  के दो सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(i) \quad 4\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 + i\|\alpha + i\beta\|^2 - i\|\alpha - i\beta\|^2$$

$$(ii) \quad \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

If  $\alpha$  and  $\beta$  are vectors of an inner-product space  $V(F)$ , then prove that :

$$(i) \quad 4\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 + i\|\alpha + i\beta\|^2 - i\|\alpha - i\beta\|^2$$

$$(ii) \quad \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

- (ब) ग्राम-शिमिट लांबिकीकरण प्रक्रम का उपयोग करते हुए दिए गए आधार  $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , से एक प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ  $\beta_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\beta_2 = (1, 2, -2)$ ,  $\beta_3 = (2, -1, 1)$ ।

(A-31)

Using Gram-Schmidt orthogonalization process, find the orthonormal basis for the given base :

$B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , where  $\beta_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\beta_2 = (1, 2, -2)$  and  $\beta_3 = (2, -1, 1)$ .

(स) सदिशों

$$\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(\mathbb{R})$$

के लिए दिखाइये कि  $V_2(\mathbb{R})$  आन्तर-गुणन समष्टि होगा, जबकि आन्तर-गुणन की परिभाषा निम्न प्रकार है :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2.$$

For the vectors :

$$\alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V_2(\mathbb{R})$$

show that  $V_2(\mathbb{R})$  is an inner-product space defined by the inner-product :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2.$$

DD-2579

5,100

(A-31)