CD–2649

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part I)
EXAMINATION, 2020

(Old Course)

MATHEMATICS

Paper Second

(Calculus)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) ε-δ विधि के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x+3} = 2.$$

Using ε-δ method, prove that :

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x+3} = 2.$$

(ब) मैक्लॉरिन प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Maclaurin's theorem.

(स) निम्नलिखित फलन के सांतत्य और अवकलनीयता की जाँच बिन्दु $x = 0$ पर कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad, & x = 0. \end{cases}$$

Test the continuity and differentiability of the following function at the point $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad, & x = 0. \end{cases}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि चक्रज :

$$x = a(t + \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

के किसी बिन्दु t पर वक्रता त्रिज्या $\rho = 4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ होती है।

Prove that the radius of curvature of the cycloid :

$$x = a(t + \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

at the point t is $\rho = 4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

(ब) वक्र :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 3xy + 3y^2 + x + 1 = 0$$

की सभी अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find all the asymptotes of the curve :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 3xy + 3y^2 + x + 1 = 0.$$

(स) वक्र :

$$x = (\log_e y)^3$$

का नति-परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Find the point of inflexion of the curve :

$$x = (\log_e y)^3$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \log(\tan x)\, dx = 0.$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \log(\tan x)\, dx = 0.$$

(ब) हृदयाभ :

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the cardioid :

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

(स) सिद्ध कीजिए कि वक्र :

$$y = \log \sec x$$

के बिन्दु $x = 0$ से $x = \frac{\pi}{3}$ तक के चाप की लम्बाई $\log_e (2 + \sqrt{3})$ है।

Prove that the length of the curve :

$$y = \log \sec x$$

from point $x = 0$ to $x = \frac{\pi}{3}$ is $\log_e(2 + \sqrt{3})$.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) निम्नलिखित अवकल समीकरण के यथातथ्य की जाँच कीजिए और अतः इसे हल कीजिए :

$$(x + y - 2)\,dx + (x - 2y - 3)\,dy = 0.$$

Test the exactness of the following differential equation and hence solve it :

$$(x + y - 2)\,dx + (x - 2y - 3)\,dy = 0.$$

(ब) वक्र कुल :

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

की लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए, जहाँ λ कुल का प्राचल है।

Find the orthogonal trajectory of the family of curves :

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

where λ is the parameter of the family.

(स) हल कीजिए :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x.$$

Solve :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x.$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Solve by method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

(ब) युगपत अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2\cos t - 7\sin t$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4\cos t - 3\sin t.$$

Solve the simultaneous differential equations :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2\cos t - 7\sin t$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4\cos t - 3\sin t.$$

(स) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

Solve :

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$